



ISSN 1001-5965  
CODEN BHHDES

# 北京航空航天大学 学报

JOURNAL OF BEIJING UNIVERSITY OF  
AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS



**2014-09**

Vol.40 No.9

## 目 次

异步双卫星 MIMO 系统中的空时编码方案 .....	赵旦峰	王 杨	廖 希	(1165)
六杆机构四位置运动生成的解域综合理论与方法 .....	韩建友	崔光珍	杨 通	(1170)
基于谱峭度与双谱的轴承故障诊断方法 .....	郑 红	周 雷	杨 浩	(1176)
分时段实时观测脉冲星的单探测器导航方法 .....	杨 博	张 睿	孙 晖	徐 帆 (1183)
杂化聚酰亚胺的制备及其耐原子氧剥蚀性能 .....	赵小虎	段凌泽	赵一志	(1189)
基于自适应滤波的编队卫星实时相对定轨 .....	秦显平	任 夏	杨元喜	(1195)
直升机旋翼防/除冰电加热控制律仿真 .....	傅见平	庄伟亮	杨 波	常士楠 (1200)
故障预测算法稳定性实时评估方法 .....	于劲松	刘 浩	张 平	万九卿 (1208)
气动负载模拟器的多余力矩分析 .....	魏 琼	吴 帅	焦宗夏	于 浩 (1213)
直升机-吊挂耦合系统平衡特性和稳定性分析 .....	曹 龙	曹义华	李春华	(1219)
伺服机构负载模拟系统设计与动态特性分析 .....	张 朋	付永领	郭彦青	祁晓野 (1225)
引入缺陷的细粒度软件变更识别方法 .....	原 子	于莉莉	刘 超	(1231)
非高斯随机振动的模拟方法 .....	徐 飞	李传日	姜同敏	荣双龙 (1239)
SST-DES 在小分离流动数值模拟中的改进 .....	王翔宇	李 栋		(1245)
基于间隙度量的高超声速飞行器包线定量划分 .....	何超凡	杨凌宇	李 鑫	何念念 (1250)
电液负载模拟器摩擦参数辨识及补偿 .....	郭彦青	付永领	张 朋	陈 娟 (1256)
基于欧拉法模拟旋转帽罩水滴撞击特性 .....	吴孟龙	常士楠	冷梦尧	王 超 (1263)
基于多智能体联盟的多机协同空战任务分配 .....	刁兴华	方洋旺	肖冰松	毛东辉 (1268)
一类不确定分数阶混沌系统的滑模自适应同步 .....	余名哲	张友安		(1276)
考虑随机干扰的高超声速滑翔飞行器轨迹优化 .....	国海峰	黄长强	丁达理	肖 红 (1281)
基于输出重定义的再入飞行器动态逆姿态控制 .....	史丽楠	张 冉	李昭莹	李惠峰 (1291)
屈曲模态对含缺陷复材加筋板后屈曲的影响 .....	徐荣章	关志东	刘 璐	张 楠 (1299)
一种地标点修正的高精度双目视觉导航方法 .....	张 洋	王新龙		(1305)
成败型系统可靠性增长的 Bayes 评估 .....	袁 昆	李晓钢		(1312)
基于 SIFT, K-Means 和 LDA 的图像检索算法 .....	汪宇雷	毕树生	孙明磊	蔡月日 (1317)

# 基于间隙度量的高超声速飞行器包线定量划分

何超凡 杨凌宇 李鑫 何念念

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191) (第二炮兵装备研究院, 北京 100085)

**摘要:** 针对高超声速飞行器飞行包线划分缺乏依据、传统划分方法繁琐等问题, 将能够描述模型差异程度的间隙度量理论引入到包线划分过程中, 提出了一种新型包线定量划分方法. 详细阐述了基于间隙度量理论的线性系统间差异度的定量计算方法; 以间隙度量值为量化指标, 通过分析模型全包线特性变化规律, 给出了确定区域划分边界的方法, 并在此基础上给出了一种基于模型差异程度最小化的控制器设计标称点选择方法. 结合某型高超声速飞行器进行了验证, 结果表明该方法能够提高包线划分过程的自动化程度, 分区和标称点选择合理, 控制效果良好.

**关键词:** 高超声速飞行器; 飞行包线; 幅频特性; 自动化; 间隙度量

**中图分类号:** V 448.21

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1001-5965(2014)09-1250-06

## Flight envelope quantitative division of hypersonic vehicle based on gap metric

He Chaofan Yang Lingyu Li Xin

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

He Niannian

(The Second Artillery Equipment Institute, Beijing 100085, China)

**Abstract:** Considering that the existing flight envelope division methods of hypersonic vehicle were too subjective and complicated, a new division method was introduced based on the theory of gap metric. The theory of gap metric was introduced, and the computing method of gap between linear systems was given. Here the gap metric was taken as the quantitative index to analyze the extent of the model characteristics' variation to confirm the frontier of subrange. Based on the result obtained above, the way of choosing the nominal state point was proposed by analyzing the gap metric of all points within the subrange. With the living example of some hypersonic vehicles, the analysis of amplitude-frequency characteristics for nominal state point and the simulations of closed-loop control system prove that the result of envelope division is reasonable, which indicates the method proposed is effective and able to increase the level of automation of envelope division.

**Key words:** hypersonic vehicle; flight envelope; amplitude-frequency characteristics; automation; gap metric

相对于传统飞行器,高超声速飞行器具有飞行包线大、参数快变以及由飞行环境复杂等因素造成的参数强不确定性等特点,仅设计一套控制器难以兼顾大包线范围内的性能要求.目前,国内

外针对全包线控制器的设计大多数采用传统的增益调参方法,基本思想是将包线划分为一系列子区域,每个子区域选取标称状态点设计一个线性控制器,即采用多个线性控制器来满足全包线的

收稿日期: 2013-10-15; 网络出版时间: 2014-03-12 16:57; DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2013.0592

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/doi/10.13700/j.bh.1001-5965.2013.0592.html

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61273099)

作者简介: 何超凡(1989-),男,河南扶沟人,博士生,hef.89@163.com.

控制需求.但关于全飞行包线内如何实现区域划分,还没有一套成熟的理论可以遵循.

文献[1-2]分别按照动压等高线和高度、马赫数进行包线划分,其很大程度依赖设计者经验;文献[3-5]就发动机控制问题基于线性模型特征值或发动机参数设计衡量指标,依此判定标称点所能代表的区域;文献[6-7]就无人机控制问题分别采用模糊聚类划分原理和基于奇异值设计衡量指标进行包线划分.以上所设计的指标均能对包线划分提供一定的参考,但多凭借经验及反复迭代验证来进行分区,较耗时耗力.

间隙度量是一种不同于范数度量的系统度量概念,最先由 Hausdorf 提出,随后 Zames 和 El-Sakkary 利用间隙度量建立了在保证闭环系统稳定下所能容许的最大不确定度量化指标<sup>[8-10]</sup>.并且 El-Sakkary 的研究显示,相对于基于范数的度量指标,间隙度量更适合用来衡量两个线性系统之间的差异大小,因而适合作为评价线性系统差异的指标.针对高超声速飞行器姿态控制问题,本文提出以间隙度量作为参考指标,指导飞行包线内的区域划分.本文简要介绍了间隙度量的理论,利用间隙度量分析得到大包线模型特性变化规律,指导完成了包线划分,并根据包线划分结果进行控制器设计验证,证实了划分结果的合理性.

### 1 基于间隙度量的包线划分方法

#### 1.1 间隙度量

令  $K$  为 Hilbert 空间中的线性算子:

$$K: H \rightarrow H$$

则  $K$  的图谱 (graph)  $G(K)$  为  $\{v, Kv\}$  的集合,其中

$$v \in D(K) = \{v | v \in H \text{ 且 } Kv \in H\}$$

且  $G(K) \in H \times H, D(K)$  称为  $K$  的域.若  $G(K)$  为  $H \times H$  的闭子空间,则称  $K$  是闭合的.

定义 1 Hilbert 空间内两个闭合算子  $K_1$  和  $K_2$  的间隙定义为

$$\delta(K_1, K_2) = \delta(G(K_1), G(K_2)) = \max\{\delta_{12}(G(K_1), G(K_2)), \delta_{21}(G(K_2), G(K_1))\} \quad (1)$$

其中

$$\delta_{12}(G(K_1), G(K_2)) = \sup_{u \in D(K_1)} \inf_{v \in D(K_2)} \frac{\|u - v\|^2 + \|K_1 u - K_2 v\|^2}{\sqrt{\|u\|^2 + \|K_1 u\|^2}}$$

$\delta_{21}(G(K_2), G(K_1))$  定义类似.对任意的两个算子  $K_1, K_2, 0 \leq \delta(K_1, K_2) \leq 1$ , 两个算子差异越小,则  $\delta$  值越接近于 0.

#### 1.2 线性系统间隙度量计算方法

当飞行器处于不同状态点时,高度  $H$ 、马赫数  $Ma$  均存在不同程度的差异,进而造成稳定状态点的小偏离线性化模型的差异,即线性空间模型可表示为高度、马赫数的函数:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(H, Ma)x + B(H, Ma)u \\ y = C(H, Ma)x + D(H, Ma)u \end{cases}$$

其中,  $x$  为状态变量;  $y$  为输出变量;  $u$  为输入变量; 状态矩阵  $A, B$  及输入矩阵  $C, D$  随高度、马赫数变化.

其传递函数为  $P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, I$  为单位阵.显然  $P(s)$  是 Hilbert 空间中的线性算子.若  $P_1$  和  $P_2$  为两系统的传递函数,则这两个系统之间的间隙可以利用算子的间隙表示为

$$\delta_{12}(P_1, P_2) = \delta_{12}(G(P_1), G(P_2)) = \|\Pi_{G(P_1)}, \Pi_{G(P_2)}\| \quad (2)$$

式中,  $G(P_i) (i = 1, 2) \in H \times H$ . 其中,  $\Pi_{G(P_1)}, \Pi_{G(P_2)}$  按定义 2 计算.

定义 2 假设  $P \in R^{n \times m}(s)$ , 并且有  $(M, N)$  与  $(\tilde{N}, \tilde{M})$  分别为被控对象  $P$  的左右互质分解, 则有正交投影矩阵为

$$\begin{aligned} \Pi_{G(P)} &= \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} (M^* M + N^* N)^{-1} [M^*, N^*] = \\ I - \begin{bmatrix} -\tilde{M}^* \\ \tilde{N}^* \end{bmatrix} (\tilde{M} M^* + \tilde{N} N^*)^{-1} [-\tilde{M}, \tilde{N}] \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $M^*(s) = M(-s)^T; N^*(s) = N(-s)^T; I$  为单位阵.

$P$  的左右互质分解形式如式(4)所示:

$$P = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1} \tilde{N} \quad (4)$$

其中,  $N, M, \tilde{N}, \tilde{M} \in H$ , 且满足

$$N^* N + M^* M = \tilde{N}^* \tilde{N} + \tilde{M}^* \tilde{M} = I$$

互质分解方法描述如下:

1) 求传递函数  $P(s)$  的最小状态空间实现:  $P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ , 其中  $(A, B)$  稳定,  $(A, C)$  可观;

2) 求取矩阵  $F$  和  $H$ , 使得  $A_F = A + BF, A_H = A + HC$  稳定, 并令

$$C_F = C + DF$$

$$B_H = A + HD$$

3) 互质分解形式为

$$P = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} M(s) &= F(sI - A_F)^{-1}B + I \\ N(s) &= C_F(sI - A_F)^{-1}B + D \\ \tilde{M}(s) &= C(sI - A_H)^{-1}H + I \\ \tilde{N}(s) &= C(sI - A_H)^{-1}B_H + D \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

则线性系统的间隙度量可由式(6)和式(7)计算得出。

$$\delta_{12}(P_1, P_2) = \delta_{12}(G(P_1), G(P_2)) = \|\Pi_{G(P_1)}, \Pi_{G(P_2)}\| = \inf_{Q \in \mathbb{H}_\infty} \left\| \begin{bmatrix} M_1 \\ N_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_2 \\ N_2 \end{bmatrix} Q \right\|_\infty \quad (6)$$

$$\delta(P_1, P_2) = \max(\delta_{12}(P_1, P_2), \delta_{21}(P_2, P_1)) \quad (7)$$

其中,  $(M_1, N_1), (M_2, N_2)$  分别表示线性传递函数  $P_1, P_2$  的左互质分解;  $Q$  为任意 Hilbert 矩阵。

由间隙度量的定义, 如果  $\delta$  接近于 0, 则表明两个系统动态特性近似; 相反,  $\delta$  越接近于 1, 则表明两系统的动态特性差别越大<sup>[11-12]</sup>。间隙度量计算的是两个系统空间差异, 并不要求两个系统有相同的正极点。如果两个开环系统(可能不稳定)的间隙度量值很小, 则其对应的闭环系统也近似。因此, 间隙度量值的大小可反映模型变化的大小, 依此可作为包线划分的依据。

### 1.3 包线划分步骤

将飞行包线记为  $\Psi$ , 最终要将  $\Psi$  划分为  $n$  个子区域, 每个子区域记为  $\phi_j$ , 相应地每个子区域均有一个间隙度量极小点(即标称点), 该状态点与子区域内其余状态点模型特性差异最小, 记为  $E_j$ , 其中  $j=1, 2, \dots, n$ 。

针对第  $j$  个子区域  $\phi_j$ , 该子区域高度范围记为  $\phi_{H_j}$ , 表示该子区域高度变化区间为  $[H_j^{\min}, H_j^{\max}]$ ; 同样地, 该子区域马赫数范围记为  $\phi_{Ma_j}$ , 表示该子区域马赫数变化区间为  $[Ma_j^{\min}, Ma_j^{\max}]$ 。

对于子区域任意两个状态点(不同  $H$  或  $Ma$ ), 记为  $E_{a1}, E_{a2}$ , 其对应的线性模型为  $P_{a1}, P_{a2}$ , 其间隙度量值记为  $\delta(E_{a1}, E_{a2})$ , 则间隙度量极小点  $E_j$  需满足

$$\min_{E_j \in \phi_j} \left[ \sum_{\substack{H \in \phi_{H_j} \\ Ma \in \phi_{Ma_j}}} \delta(E_j, E(H, Ma)) \right]$$

其中  $E(H, Ma)$  表示子区域内不同高度和马赫数下的状态点。

此外, 包线划分时, 在保证子区域涵盖整个包线的前提下, 要尽量减少子区域的个数, 即

$$\min_n \left[ \left( \bigcup_{j=1, 2, \dots, n} \phi_j \right) \supset \Psi \right]$$

综上所述, 飞行包线标称点  $E_j$  的选择需满足

如下优化条件:

$$\min_n \left\{ \min_{j=1, 2, \dots, n} \left[ \sum_{\substack{H \in \phi_{H_j} \\ Ma \in \phi_{Ma_j}}} \delta(E_j, E(H, Ma)) \right] \right\}$$

为实现上述优化, 如图 1 所示, 采取以下 3 个步骤。

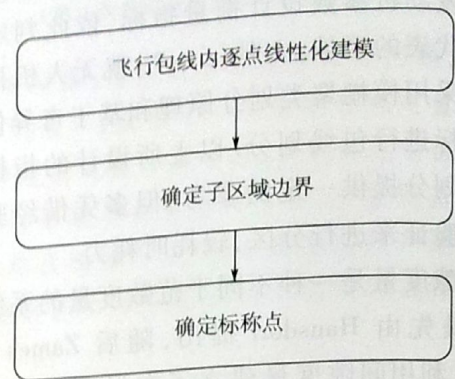


图 1 基于间隙度量的包线划分方法流程图  
Fig. 1 Flowchart of envelope division method based on gap metric

1) 在飞行包线内建立一系列线性化模型, 作为分析模型特性变化规律的基础。

将飞行包线内按照一定间隔  $\Delta H, \Delta Ma$  网格化, 则共有  $m \times p$  个点,  $m = (H_{\max} - H_{\min}) / \Delta H + 1$ ,  $p = (Ma_{\max} - Ma_{\min}) / \Delta Ma + 1$ , 并配平线性化从而得到一系列线性模型。

理论上间隔  $\Delta H, \Delta Ma$  选取越小, 越能精确分析相邻状态点的模型特性差异, 越能找出模型特性的变化规律, 但计算量会相应增加。

2) 计算相邻状态点模型之间的间隙度量值, 并对其进行分析, 以确定区域边界。

分别计算包线内每个状态点  $E(H, Ma)$  随高度和马赫数的间隙度量变化率, 即取同一高度  $H_0$  (或马赫数  $Ma_0$ ) 下间隙度量随马赫数(或高度)的变化率, 即可表示为

$$\left. \frac{\partial \delta}{\partial Ma} \right|_{H=H_0} \quad \left. \frac{\partial \delta}{\partial H} \right|_{Ma=Ma_0}$$

已知如果两个模型的间隙度量值  $\delta$  越小, 则表明两个模型动态特性越相近; 相反,  $\delta$  越大 ( $\leq 1$ ), 则表明两模型的动态特性差别越大。当  $\delta$  足够大时, 一个控制器同时适应两个模型特性就会显得困难, 因此可定义一个基于间隙度量的指标  $\gamma$  来表示该界限。

即当间隙度量值累积到  $\gamma$  时:

$$\int \left. \frac{\partial \delta}{\partial Ma} \right|_{H=H_0} dMa \geq \gamma \quad \text{或} \quad \int \left. \frac{\partial \delta}{\partial H} \right|_{Ma=Ma_0} dH \geq \gamma$$

则对应的高度或马赫数即作为分区边界, 其中  $\gamma$  值的选取应根据实际对象特性确定。

3) 一般情况下, 一个飞行区域内的标称点要

满足与区域内其他状态点的模型特性差异最小,在以间隙度量为衡量指标情况下,确定标称点即为寻找子区域的“间隙度量极小点”。

即求得状态点  $E_{a_0}$ ,使其与子区域内其余状态点  $E_b$  间隙度量值的均值达到最小,即满足

$$\min_{a_0=1,2,\dots,m_j \times n_j} \left\{ \frac{1}{m_j \times n_j} \left[ \sum_{b=1}^{m_j \times n_j} \delta(E_{a_0}, E_b) \right] \right\}$$

其中  $m_j, n_j$  为子区域  $\phi_j$  的网格数,  $j=1, 2, \dots, n$ .

### 2 包线划分举例验证

针对某型高超声速飞行器,以高度范围 [10, 34] km, 马赫数范围 [1, 10] 为例. 将飞行包线内的状态点按照一定间隔 ( $\Delta H = 2$  km,  $\Delta Ma = 1$ ) 进行线性化,得到一系列线性模型.

依据上述所提方法,分别计算得到固定高度或固定马赫数下间隙度量变化率,即

$$\left. \frac{\partial \delta}{\partial Ma} \right|_{H=H_0} \quad \left. \frac{\partial \delta}{\partial H} \right|_{Ma=Ma_0}$$

其中  $H_0$  和  $Ma_0$  分别表示某间隔点的高度和马赫数. 变化曲线如图 2 和图 3 所示. 可以看到,当高度(或马赫数)固定时,间隙度量值随马赫数(或高度)的变化具有较高的统一变化规律.

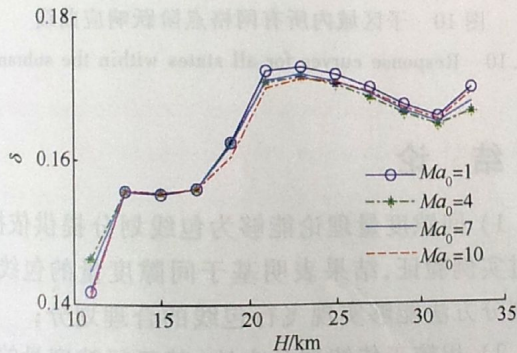


图2 同一马赫数下间隙度量随高度变化率  
Fig.2 Changing curves of gap metric with height at same mach

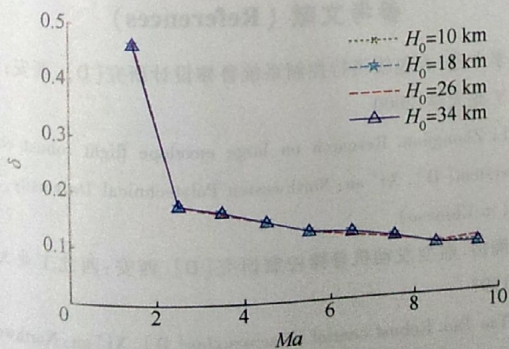


图3 同一高度下间隙度量随马赫数变化率  
Fig.3 Changing curves of gap metric with Mach at same height

研究显示,本对象模型的间隙度量值变化累

计超过 0.8 时,就难以用一个控制器实现控制,故取  $\gamma = 0.75$ .

如图 2 所示,当马赫数固定时,在 [10, 34] km 高度范围内可划分为 3 个子区间,即 [10, 18] km, [18, 26] km, [26, 34] km. 如图 3 所示,当高度固定时,在 [1, 10] 马赫数范围内可划分为 2 个子区间,即 [1, 4], [4, 10]. 包线划分结果如图 4 所示.

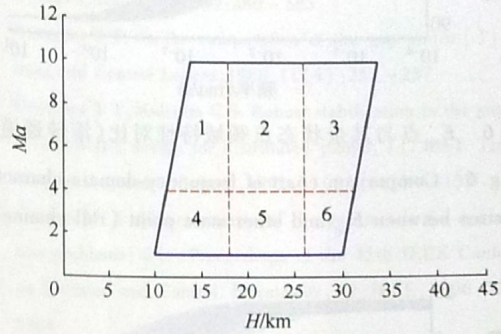


图4 包线划分结果示意图  
Fig.4 Flight envelope division result

以图 4 中区域 2 为例,分别计算各个状态点与其余状态点模型间隙度量值,取均值如图 5 所示. 可知点  $E_{a_0}$  ( $H = 24$  km,  $Ma = 9$ ) 与其余状态点处模型间隙度量值最小,说明点  $E_{a_0}$  处的模型特性与子区域内其余点差异最小,即可取间隙度量极小点  $E_{a_0}$  作为该子区域的标称点.

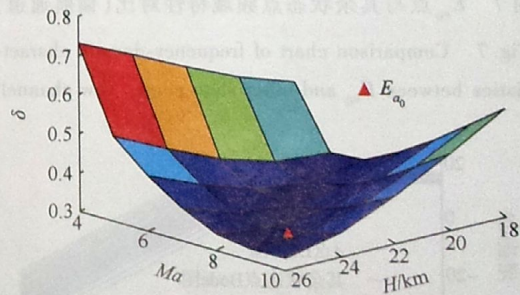


图5 间隙度量极小点示意图  
Fig.5 Schematic of gap metric minimum point

为验证间隙度量极小点选取的合理性,比较  $E_{a_0}$  点与分区内其余状态点的各个通道的频率特性,如图 6 ~ 图 8 所示,  $E_{a_0}$  状态点线性模型的 Bode 图处在整个区域内其他状态点的 Bode 图分布包络的正中心处,表明了间隙度量极小点选取的合理性. 基于该状态点的线性模型所设计的控制器在区域内其余状态点工作时,往往能够表现出更优异的性能.

为验证分区结果的有效性,采用极点配置方法针对间隙度量极小点设计控制器,并验证同一控制器能否覆盖子区域内其余状态点. 三轴姿态角同时加阶跃指令,仿真结果如图 9、图 10 所示.

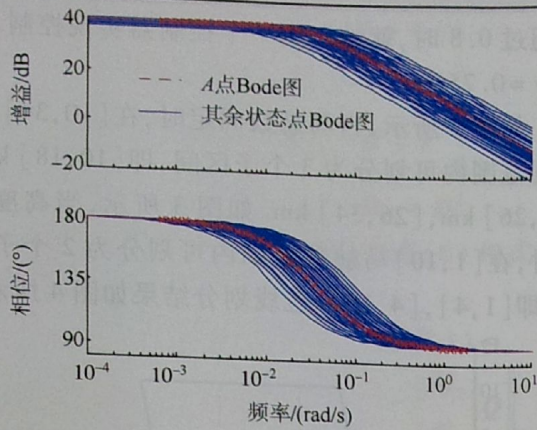


图6  $E_{a_0}$ 点与其余状态点频域特性对比(滚转通道)

Fig. 6 Comparison chart of frequency-domain characteristics between  $E_{a_0}$  and other state point (roll channel)

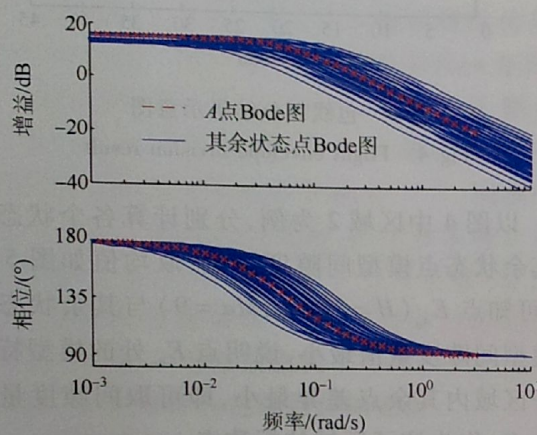


图7  $E_{a_0}$ 点与其余状态点频域特性对比(偏航通道)

Fig. 7 Comparison chart of frequency-domain characteristics between  $E_{a_0}$  and other state point (yaw channel)

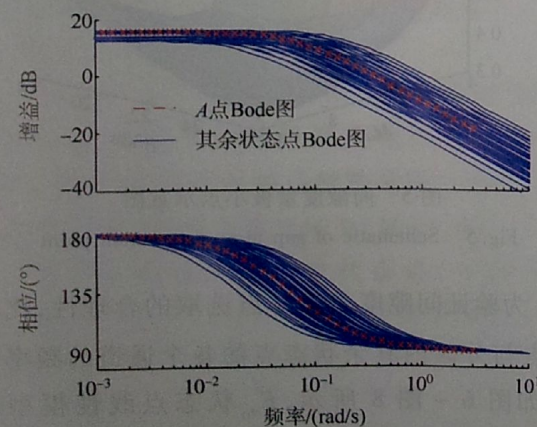


图8  $E_{a_0}$ 点与其余状态点频域特性对比(俯仰通道)

Fig. 8 Comparison chart of frequency-domain characteristics between  $E_{a_0}$  and other state point (pitch channel)

如图10所示,在基于标称点所设计的控制器下,按照一定间隔,对覆盖整个子区域的各个状态点(共 $5 \times 7$ 个)进行仿真分析.仿真结果表明,基于标称点A设计的控制器能够覆盖子区域内所有状态点,从而反映了区域划分的合理性.

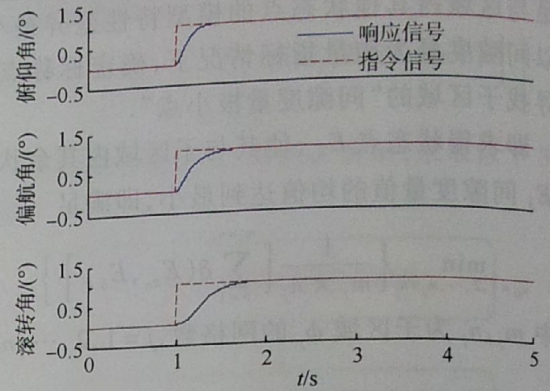


图9 间隙度量极小点  $E_{a_0}$  阶跃响应曲线

Fig. 9 Response curves for the state of gap metric minimum point  $E_{a_0}$

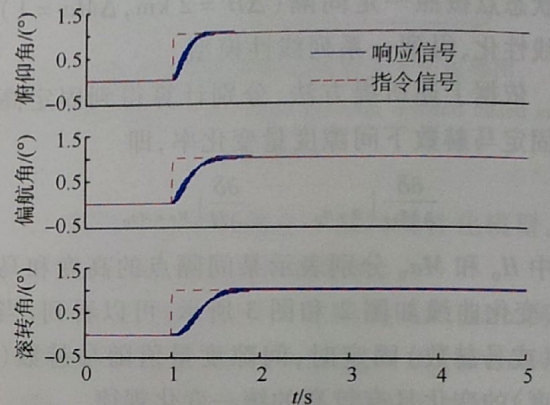


图10 子区域内所有网格点阶跃响应曲线

Fig. 10 Response curves for all states within the subrange

### 3 结论

1) 间隙度量理论能够为包线划分提供依据,通过实例验证,结果表明基于间隙度量的包线定量划分方法能够实现飞行包线的合理划分;

2) 相较于传统划分方法,基于间隙度量的划分方法能够大幅降低包线划分的工作量,故更具有工程实用性.

### 参考文献 (References)

- [1] 李中建. 大包线飞行控制系统鲁棒设计研究[D]. 西安:西北工业大学,2000  
Li Zhongjian. Research on large envelope flight robust control system[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2000 (in Chinese)
- [2] 陶涛. 航空发动机鲁棒控制研究[D]. 西安:西北工业大学,1997  
Tao Tao. Robust control of aeroengine [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 1997 (in Chinese)
- [3] 王进,李剑,谢寿生. 航空发动机控制问题研究中飞行包线区域的划分方法[J]. 航空动力学报,2003,18(2):436-439  
Wang Jin, Li Jian, Xie Shousheng. Flight envelope division method in aeroengine control study[J]. Journal of Aerospace Power,

- 2003, 18(2): 436-439 (in Chinese)
- [4] 王海泉, 郭迎清, 李睿, 等. 航空发动机全飞行包线鲁棒控制器设计研究[J]. 测控技术, 2009, 28(5): 48-51  
Wang Haiquan, Guo Yingqing, Li Rui, et al. Design of full flight envelope controller for aeroengine [J]. Measurement & Control Technology, 2009, 28(5): 48-51 (in Chinese)
- [5] 李述清, 张胜修, 胡卫红. 用于控制器分区设计的发动机飞行包线区域最优划分[J]. 航空动力学报, 2012, 27(2): 445-449  
Li Shuqing, Zhang Shengxiu, Hu Weihong. Partition optimization in the flight envelope for control design of aero-engines [J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(2): 445-449 (in Chinese)
- [6] 杨大鹏. 某无人机全包线控制律设计技术研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2012  
Yang Dapeng. Research on control technologies over full flight envelope for UAV [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2012 (in Chinese)
- [7] 曾丽兰. 基于  $H_{\infty}$  回路成形的无人直升机非脆弱鲁棒飞行控制研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2006  
Zeng Lilan. Unmanned helicopter non-fragile robust flight control research based on  $H_{\infty}$  loop shaping [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2006 (in Chinese)
- [8] 刘斌, 王常虹, 李伟. 间隙度量与跟踪系统中的鲁棒控制器设计[J]. 控制与决策, 2010, 25(11): 1714-1718  
Liu Bin, Wang Changhong, Li Wei. Gap metric and robust controller design in tracking systems [J]. Control and Decision, 2010, 25(11): 1714-1718 (in Chinese)
- [9] El-Sakkary A K. The gap metric: robustness of stabilization of feedback systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1985, 30(3): 240-247
- [10] Zames G, El-Sakkary A K. Unstable systems and feedback: the gap metric [C] // Proceedings of Allerton Conf on Communication, Control, and Computing. Urbana: University of Illinois at Urbana-Champaign, 1980: 380-385
- [11] Georgiou T T. On the computation of the gap metric [J]. Systems and Control Letters, 1988, 11(4): 253-257
- [12] Georgiou T T, Malcolm C S. Robust stabilization in the gap metric: controller design for distributed plants [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(8): 1133-1139
- [13] Cantoni M. A characterisation of the gap metric for approximation problems [C] // Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. Piscataway, NJ: IEEE, 2006: 5359-5364
- [14] French M. Adaptive control and robustness in the gap metric [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(2): 461-478
- [15] Galan O, Romagnoli J A, Arkun Y, et al. On the use of gap metric for model selection in multi-linear model-based control [C] // Proceedings of the American Control Conference. Piscataway, NJ: IEEE, 2000, 6: 3742-3746